

# İLKÖĞRETİM SEVİYESİNDEKİ ÖĞRENCİLER İÇİN CEBİRSEL DÜŞÜNME VE CEBİRSEL MUHAKEME BECERİSİNİN ÖNEMİ<sup>1</sup>

## THE IMPORTANCE OF THE ALGEBRAIC THINKING AND ALGEBRAIC REASONING SKILLS FOR PRIMARY SCHOOL STUDENTS

Deniz KAYA

Dokuz Eylül Üniversitesi, Eğitim Bilimler Enstitüsü, İzmir-Türkiye  
[denizkaya50@yahoo.com](mailto:denizkaya50@yahoo.com)

Doç. Dr. Cenk KEŞAN

Dokuz Eylül Üniversitesi, Buca Eğitim Fakültesi, İzmir-Türkiye  
[cenk.kesan@deu.edu.tr](mailto:cenk.kesan@deu.edu.tr)

### ÖZET

Cebirsel düşünme ve muhakeme becerisi öğrencilerin yalnızca matematik derslerinde değil günlük yaşamlarında karşı karşıya kaldıkları güçlüklerin üzerinde düşünmeye, yorum yapmaya ve çözüm yolu aramaya yönelik zihinsel aktiviteleri içerir. Oysa öğrencilerin cebir öğrenmeleri ile ilgili yapılan araştırmaların genelinde; öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme etme becerisi ile cebirsel işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğu, matematiksel bilgileri ilişkilendirmede zorlandıkları ve günlük yaşam durumları arasında bağlantı kuramadıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebiri anlamaları ve cebirsel düşünme düzeylerini artırmaları için öğrendiklerini uygulayabilmeli, kavramlar arasında geçişler yapabilmeli ve çoklu temsil değerleri ile bunu ortaya koyabilmeleri gerekmektedir. Bu çalışmada, ilköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi tartışılarak yapılan çalışmalar ışığında bu durumun gerekçesi ortaya konulmaya çalışılmıştır.

**Anahtar Sözcükler:** Cebir, cebir öğretimi, cebirsel düşünme, cebirsel muhakeme

### ABSTRACT

The algebraic thinking and algebraic reasoning skills involves mental activities not only those used in math class but also those for considering, commenting and searching a solution for difficulties that students faced with in their daily life. However, in so many researches about students' algebraic learnings, it was seen that students' algebraic thinking and reasoning skills and skills to perform algebraic operations are inadequate, students have difficulties in associating mathematical information and they can not relate mathematics with daily life situations. Students should be able to practice what they have learned, carry out the transition between concepts and present this with multiple representations in order to understand algebra and raise their algebraic thinking levels. In this study, the importance of algebraic thinking and algebraic reasoning skills for primary school students are discussed and the justification of this situation is tried to be proved.

**Keywords:** Algebra, algebra teaching, algebraic thinking, algebraic reasoning

### GİRİŞ

Matematik eğitiminin önemi herkes tarafından paylaşılsada matematiği öğrenebilmek veya öğretebilmek zorlu bir süreç gerektirir. Bu sürecin sağlıklı aşılabilmesi etkili bir matematiksel düşünmeye bağlıdır. Matematiksel düşünme, matematiğin aritmetik, cebir, geometri, olasılık gibi farklı alanlarında kullanılan matematiksel tekniklerin doğasına bağlı olarak farklı biçimler almaktadır (Dindyal, 2003). Düşünme ise akıl ile zekânın ortak bileşimi, dünyayı anlama çabası, muhakeme etme, zihinsel bir süreç aynı zamanda bir beceridir, doğrudan öğretilebilir, öğretilmelidir (Çubukçu, 2004). Matematik, düşünmeyi geliştirdiği bilinen en önemli araçlardan biridir. Bilindiği gibi insanı diğer canlılardan ayıran temel özelliği düşünebilme, olaylardan anlam çıkartıp koşulları kendine uygun olarak yeniden düzenleyebilme yeteneğidir (Umay, 2003:234). Matematik soyuttur. Özellikle küçük yaşlarda öğretimine somut deneyim ve işlemlerden de başlansa, “zihinsel bir sistem” olarak soyut

<sup>1</sup> Bu çalışma, 2013.KB.EĞT.009 nolu proje kapsamında Dokuz Eylül Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Koordinasyon Birimi tarafından desteklenen, ikinci yazar danışmanlığında, birinci yazar tarafından hazırlanan “Çoklu Temsil Temelli Öğretimin Öğrencilerin Cebirsel Muhakeme Becerilerine, Cebirsel Düşünme Düzeylerine ve Matematiğe Yönelik Tutumlarına Etkisi Üzerine Bir İnceleme” isimli doktora çalışmasının bir bölümünü oluşturmaktadır.

düşünmeye yöneliktir (Umay,1996:146). Cebirde de durum böyledir. Cebir matematiğin önemli bir konu alanıdır. Cebir yapmak soyutlama yapabilme gücü gerektirir. Bu bakımdan, matematiğin bir soyutlama yapma bilimi oluşu cebirsel ifadelerde tam anlamını bulur (Altun, 2005).

Cebir, bugün çok farklı işlevleri üstlenmektedir. Cebirin işlevlerinden bir kaçını şu şekilde sıralayabiliriz: Cebir bir dildir, cebir bir problem çözme aracıdır, cebir bir düşünme aracıdır, cebir bir okul dersidir (Dede ve Argün, 2003:180). Cebir alanındaki bilgi ve becerilerin artması aynı zamanda cebirsel düşünme becerilerinin de gelişimini sağlar. Bu noktada cebirsel düşünmenin ne olduğu sorusu akıllara gelir. Cebirsel düşünme becerileri, cebirin belirleyici bir bileşeni olarak kabul edilir ki bu durum cebirsel ifadelerin ve matematiksel fonksiyonların manipülasyonlarını içeren işlem becerilerden oluşur (Trybulski, 2007:4). Cebirsel düşünmenin gelişimi doğrudan doğruya bireylerin cebir alt öğrenme alanında aldıkları eğitimle ilintilidir (Yenilmez ve Teke, 2008). Cebirsel düşünme, matematiksel düşünmenin özel bir biçimidir ve yalnızca cebir çalışmalarıyla sınırlı değildir. Dolayısıyla matematiksel düşünmenin kullandığı problem çözme, çoklu gösterimlerden yararlanma ve akıl yürütme (tümdengelimli ve tümevarımlı) gibi becerileri içermektedir (Çelik, 2007:8).

Cebirsel düşünme yapısının temeli cebirsel muhakemeye dayanmaktadır. Birçok çalışmada cebirsel düşünme ve muhakemeyi teşvik etmenin önemi vurgulanmaktadır (Kaput, 1995; NCTM, 2000). Swafford ve Langrall (2000) cebirsel düşünme ve muhakemeyi “miktarı bilinen gibi miktarı bilinmeyen üzerinde işlem yapma yeteneği” olarak tanımlamıştır. Herbert and Brown (1997) cebirsel düşünme ve muhakemeyi ise farklı durumların analizi için matematiksel sembolleri ve araçları kullanma, matematiksel bilgilerin temsilinde kelimeler, şekiller, tablolar, grafikler ve denklemleri kullanma, fonksiyonel ilişkileri benzer ve yeni durumlarla ilişki kurma, bilinmeyenleri çözmek için matematiksel bulguları yorumlama veya uygulamak olarak tanımlamıştır. Geçen yirmi yıl boyunca birçok araştırma matematikte düşünmenin ve muhakeme etmenin önemi üzerinde vurgu yapsa da (House, 1999; Russell,1999), ilköğretim çağındaki öğrencilerin matematiksel düşünme ve muhakeme becerilerini içeren özellikle cebirsel düşünme ve muhakeme etme becerileri ile alakalı çok az şey bilinmektedir. Ulusal Eğitimsel Gelişimi Değerlendirme Birimi (National Assessment of Educational Progress [NAEP]) öğrencilerin cebir ve fonksiyonlar üzerindeki performansını değerlendirmiştir. Rapora göre öğrenci performanslarının 1990 ve 1992 yıllarına göre 1996 yılında bazı ilerlemeler kaydettiğini ama birçok öğrencinin genellikle cebirsel konuların ele alındığı cebir derslerinde çok iyi bir performansın olmadığı belirtilmiştir (Blume ve Heckman, 2000).

### **Problem Durumu**

Cebir konularının matematik derslerinde öğretilmeye başlanmasıyla birlikte öğrencilerin cebiri öğrenmede zorlandığı görülmektedir (Ersoy ve Erbaş, 2005). Birçok araştırmanın sonucu öğrencilerin cebir kavramlarını (denklem, eşitlik, değişken, cebirsel ifadeler, bilinmeyen gibi) anlamada zorlandıkları ve kavram yanılgısı içinde olduklarını göstermektedir (Baki, 1998; Serin, 2001; Dede ve Argün, 2003; Ersoy ve Erbaş, 1998; Kaput, 1999; Kieran, 1992; MacGregor ve Stacey, 1993). Cebir kavramlarının öğrenilmesindeki sıkıntıların birçok araştırma konusunda yer bulması, öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme becerilerinde de sıkıntıların olduğu anlamına gelmektedir. Nitekim uluslararası çalışmalarda cebirsel düşünme ve muhakemenin önemi vurgulanmakta ve öğretimi konusunda farklı yaklaşımlara yer verilmektedir (NAEP, 2002; NCTM, 2000; TIMSS, 2003).

Cebir konularının öğretilmesindeki farklılıklar öğrencide oluşacak zihinsel aktiviteleri doğrudan etkiler. Seçilen öğretim yöntemleri cebirsel düşünme ve muhakeme etme becerisinin anlamlı olarak ve yaşam boyu gelişimini sağlar. Tüm bu anlatılanlar ışığında cebir önemlidir ve öğrenciler yaşamın kendisinde ve matematikte başarılı olabilmek için cebirsel düşünme becerilerini en verimli şekilde kullanmaları gerekir. Öğretmenlerin, cebiri öğrencilerine anlama ve hatırd tutma düzeylerini en üst düzeye çıkaracak şekilde öğretmeleri gerekmektedir (Leitze ve Kitt, 2000).

Bu çalışmada, ilköğretim seviyesindeki öğrenciler için cebirsel düşünme ve cebirsel muhakeme becerisinin önemi tartışılarak yapılan çalışmalar ışığında bu durumun gerekçesi ortaya konulmaya çalışılmıştır.

## **Cebir ve Cebir Öğretimi**

Cebir öğretimi ve öğrenimi ilkokulda aritmetikten başlayarak ortaokul da denklemler, lise de ise fonksiyon bilgilerine kadar geniş bir alanı içine alan yelpazeye yayılır. Bu durum okul öncesi dönemden 12. sınıfa kadar eğitim programında tüm öğrencilere sağlanması gereken cebir alt öğrenme alanlarına yönelik konuları kapsayan cebir standartları süreçlerinden oluşmaktadır. Bu süreç NCTM (2000:223)'e göre *-örüntü, bağıntı ve fonksiyonları anlama, cebirsel sembolleri kullanarak matematiksel durum ve yapıları çözümlenme ve sunma, matematiksel modelleri nicel ilişkileri anlamak ve sunmak için kullanmak, çeşitli durumlarda değişimi analiz etme-* olarak kategorilere ayrılmıştır. Bu kategorilerde yer alan 6-7 ve 8. sınıflara ait konuların alt öğrenme alanları ise şu şekildedir:

- Çeşitli şekilleri grafik, tablo, kelime ve mümkünse sembolik kurallarla açıklama, çözümlenme ve genelleme yapmak.
- Bağıntıların farklı gösterim biçimlerini karşılaştırma ve ilişkilendirme yapma.
- Doğrusal ya da doğrusal olmayan fonksiyonları belirleme ve tablo, grafik ya da denklem kullanarak karşılaştırma yapmak.
- Değişkenlerin farklı kullanımlarını anlamak için ilk kavramsal anlamayı geliştirmek.
- Doğru grafikleri ile sembolik ifadelerin kesişim ve eğimlerine dikkat ederek aralarındaki ilişkiyi keşfetmek.
- Doğrusal ilişkileri içeren problemler çözme ve ifade etmek için sembolik cebir kullanmak.
- Doğrusal denklemleri çözmek ve cebirsel olarak ifade etmek için eşdeğer formüller oluşturmak ve belirlemek.
- Grafikleri, tabloları veya denklemleri kullanarak içeriği verilen problemleri modellemek ve çözmek.
- Doğrusal ilişkilerde sayısal değişimleri analiz etmek için grafikleri kullanmak (NCTM, 2000:223).

Cebir, matematik dersi içerisinde önemli bir yere sahip konu alanlarından biridir ve özellikle son 25 yıl içerisinde cebirin öğretimine/öğrenimine/anlamına ve gelişen teknolojinin cebir öğretiminin etkisine yönelik birçok araştırma/çalışma faaliyetleri yürütülmüş, hala da yürütülmektedir. Yapılan bu çalışmalar sonucunda birçok ülke cebir öğretimi konusunda öğretim programlarında köklü değişikliklere ve düzenlemelere gitmiştir. Ancak yapılan değişikliklere ve düzenlemelere rağmen birçok ülkede öğrencilerin cebiri öğrenmede hala sıkıntı yaşadıkları görülmektedir (Baki, 1998; Dede ve Argün, 2003; Kieran, 1992). Bu durumu Cockcroft (1982:60) şu şekilde özetlemiştir: Cebir, öğrenciler arasında olumsuz tutumların ve önemli bir kafa karışıklığının nedenidir. Her ne kadar cebiri öğrenme/öğretme konusunda çok sayıda çalışmalar/araştırmalar yapılmış olsada, özellikle öğretmenlerin cebiri nasıl öğretebilecekleri ile etkili cebir öğrenme ortamlarının sahip olması gereken unsurların (gelişmelerin) neler olabileceğine yönelik çalışmalar çok az sayıdadır. Bu durumun okullarda cebir öğretiminin geleneksel yöntemlere bağlı kalınarak sürdürülmesine neden olduğu düşünülmektedir (Doerr, 2004). Dede, Yalın ve Argün (2002)'e göre öğrencilerin cebir öğretiminde zorlanmalarının nedenleri; değişkenlerin farklı kullanımlarını ve genelleme yapmadaki rollerini bilememe ile değişkenleri yorumlayamama ve işlem yapamama olarak belirtmektedir. Bu durum Thomas ve Tall (2001)'e göre ise öğrencilerin, cebir aşamasındaki manipülasyon işlemlerinde zayıf olmaları ve başaramamaları ile ilgili bir durumdur.

Milattan Önce [M.Ö], yaklaşık 1800 yılından beri varlığını sürdüren cebirin temel amacı Booth (1986)'a göre genel ilişkilerin ve işlemlerin nasıl öğrenildiğini temsil etmek, bu temsiller aracılığıyla problemleri geniş bir yelpazede çözebilmek ve bilinenlerden yeni ilişkiler geliştirmek olarak tanımlansa da öğrencilerin herhangi bir amacı olmadığında isteğe bağlı manipülasyon tekniklerini çok az kullandıkları belirtilmektedir. Bu durumu Stacey ve MacGregor (1997) ise şu şekilde özetlemiştir.

Öğrencilerin genellikle  $x$ 'in alabileceği büyük değerler için  $y$ 'in ne olabileceğini tahmin etmelerine rağmen  $x$  ile  $y$  arasındaki ilişkiyi ve temsil eden cebirsel sembollerini yazmada zorlandıkları görülmektedir. Nitekim TIMMS'in uluslararası çalışma raporu da bu durumu destekler niteliktedir. Rapora göre yedinci sınıf öğrencilerin sadece %47 ile sekizinci sınıf öğrencilerin %58'i,  $m + m + m + m$  eşitliğinin,  $4m$ 'ye eşit olacağını doğru cevaplayabilmiştir (Beaton ve diğer.,1996).

Cebir, öğretimi ve öğrenme konusunda yaşanan tüm bu zorlu süreçlere rağmen cebirin özellikle dönüştürülebilir aktivitelerde kullanılması (Kieran ve Yerushalmy, 2004), cebir çalışmalarının bağlamsal temaların içerisine yerleştirilmesi (NCTM, 2000) ve cebirle ilgili anahtar kavramların çoklu temsiller ve teknoloji birlikteliği ile sunulması (Kieran ve Yerushalmy, 2004), gerektiğine yönelik önerilerde bilim insanları tarafından sıkça dile getirilmektedir. Ayrıca alanyazında cebir öncesi eğitimin önemi de vurgulanmaktadır. Özellikle cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin öğrencilere küçük yaşlarda kazandırılmasının doğru olacağı ancak bunu yaparken uygun öğrenme araçları ve yöntemlerinin kullanımına dikkat edilmesi gerekir (NCTM, 2000; Yackel, 1997).

### **Cebirsel Düşünme ve Muhakeme Becerisi**

1989 yılında, aralarında Ulusal Araştırma Konseyi (National Research Council, [NRC]) ve NCTM'in de bulunduğu birçok kuruluş, cebir için fonksiyonel bir yaklaşımın da içinde bulunduğu, cebirsel düşünme ve muhakeme becerisine vurgu yapan bir cebir müfredatının geliştirilmesine yönelik reform çağırısında bulundu (Nilklad, 2004:1). Bu reformun sloganı ise çok sayıda öğrenciye cebiri daha iyi öğretmek, onları cesaretlendirerek cebir öğrenmeye teşvik etmektir. Bu değişim hareketiyle birlikte cebir öğretimine yepyeni bir boyut kazandırılarak, cebirsel düşünme ve muhakeme edebilmenin önemi vurgu yapılmış ve bu iki yapının (cebirsel düşünme/muhakeme becerisi) cebir öğrenimine/öğretimine katkısı ortaya çıkarılmaya çalışılmıştır. Matematik müfredatının yeniden yapılandırılmasına yönelik bu atılım sayesinde, öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme becerilerinin gelişiminde önemli ilerlemeler sağlanmış, erken yaşta cebirsel fikirleri temsil eden değişik türdeki araçlara olan erişim kolaylaşmış, cebirsel beceriler ve anlayışların hızlanmasına paralel olarak geliştirilen düşünceler birçok alanda uygulama fırsatı bulmuştur (Kapat,1995; NCTM, 2000).

Lawrence ve Hennessy (2002)'e göre en genel anlamda cebirsel düşünme olayları açıklamak ve tahmin etmek için bilgi veya olayları matematik diline çevirerek dünyayı daha iyi yorumlamaya ihtiyaç duyulan anlayış kümesinden oluşmaktadır. Aynı zamanda cebirsel düşünme, ders kitabı cebiri için gerekli olan soyut düşünebilmenin kapısını aralar. Bu anlayışı etkili bir şekilde uygulayabilmek ise genellikle aşağıdaki bileşenleri gerektirir:

- İhtiyaç duyulan matematiksel modeli kurma ve kullanma.
- İhtiyaç duyulan veriyi toplama ve kayıt tutma.
- Modeller için veri arama ve düzenleme.
- Modelleri tanımlama ve genişletme.
- Çoğunlukla bulguları bir kural halinde genelleme.
- Tahmin yapmak için herhangi bir kuralı da içeren bulguları kullanma (Lawrence ve Hennessy, 2002:xi).

Öğrencilerin soyut işlemler dönemine geçmesiyle birlikte cebirsel düşünmenin gelişimi de hızlanır ve birbirini sıra ile izleyen dört düzeyden oluşur (Altun, 2005). Bu düzeyler ise şu şekildedir:

- **Düzye 1:** Bu safha, tümüyle aritmetik işlemlerin sonucunda bir harfin değerini bulma, harfleri birer nesne adı olarak almak suretiyle bir problemi sonuçlandırma veya içerdiği harflere rağmen bu harflere değer vermeden bir işlemi sonuçlandırma şeklindeki soruların çözülebildiği safhadır.
- **Düzye 2:** Bu düzey, birinci düzeyle soyutluluk bakımından aynıdır. Birinci düzeyden farklı olarak, bu düzeye ait sorular biraz daha karmaşıktır.
- **Düzye 3:** Bu safhada harfler bir bilinmeyen olarak algılanır ve bu bilinmeyenler üzerinden işlem yapılabilir.



- **Düzey 4:** Bu düzeyde, 3. safhadakilere benzer fakat daha karmaşık ifadeler anlam yüklenebilir ve işlemler sonuçlandırabilir (Hart ve diğer., 1981'den akt. Altun, 2005).

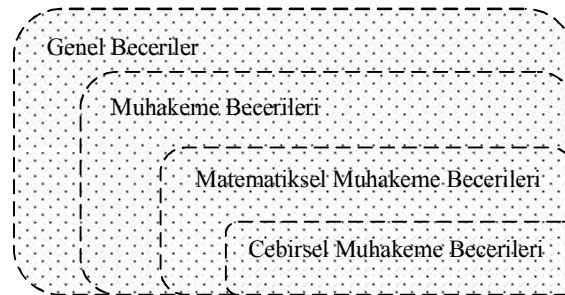
Literatürde yer alan tanımlardan hareketle cebirsel düşünme; zihinsel aktivitelerin bir yansıması olarak sembollere anlamlar yükleyerek cebirsel ilişkiler arasında bağ kurmayı, farklı ve çoklu temsiller yardımıyla düşüncelerini açığa vurmaya, cebirsel ilişkilerin içerisinde yer alan somut-yarı somut ve soyut kavramları betimlemeyi ve muhakeme etme yoluyla sonuca ulaşabilmeyi temsil eder.

Üzerinde durduğumuz diğer bir kavram olan cebirsel muhakeme kavramına geçmeden önce muhakeme kavramının ne olduğunu açıklamaya çalışalım. Muhakeme, bir başka deyişle usavurma ya da akıl yürütme, bütün etmenleri dikkate alarak düşünüp akılcı bir sonuca ulaşma sürecidir. Bir konuda muhakeme yapabilenler, o konuda yeterli düzeyde bilgi sahibidir ve yeni karşılaştığı durumu tüm boyutlarıyla inceler, keşfeder, mantıklı tahminlerde, varsayımlarda bulunur, düşüncelerini gerekçelendirir, bazı sonuçlara ulaşır, ulaştığı sonucu açıklayabilir ve savunabilir (Umay, 2003:235).

Muhakeme, çeşitli düşünme tarzlarından oluşan bir faaliyettir (Peresini ve Webb, 1999). Yackel ve Hanna (2003), muhakemeyi hem tümevarım, tümdengelim, ilişkilendirme ve çıkarsamanın kullanımı hem de öğrenenlerin problemleri çözmek için birbirleriyle etkileşime geçtikleri ortak bir faaliyet alanı olarak tanımlamışlardır. Bir başka tanımda ise muhakeme, iddialar üretme ve sonuçlara ulaşmak için kullanılan bir düşünce aracı olarak nitelendirilmektedir (Lithner, 2008).

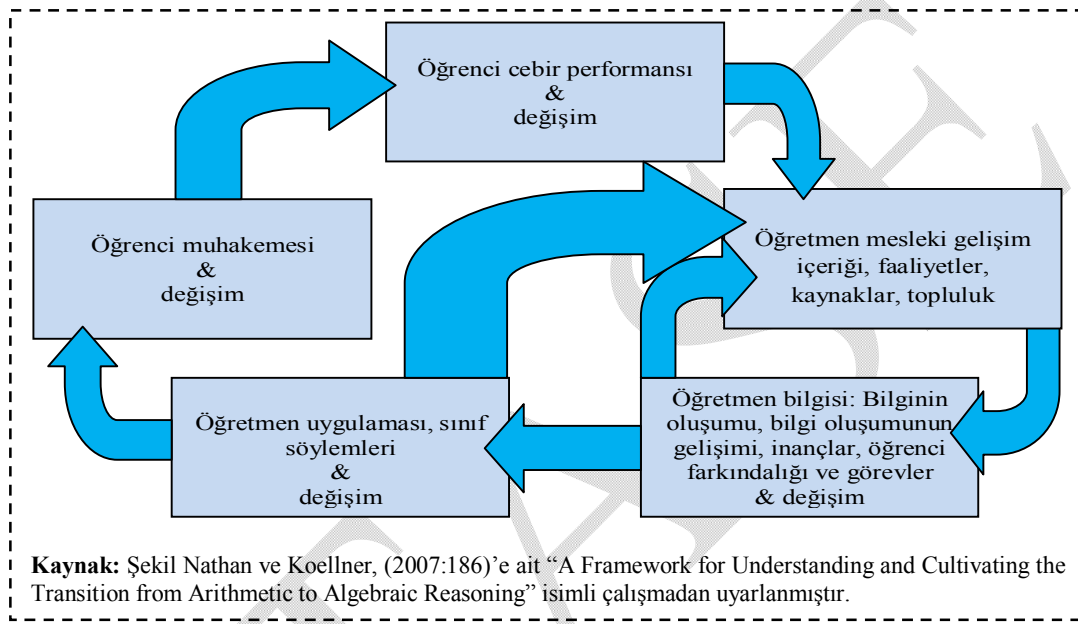
En genel anlamda muhakeme, belli bir amaca yönelik olarak planlı, programlı adımlar dâhilinde ve mantık çerçevesinde düşünüp karar verme veya bir olay, problem ya da durumu "Neden" ve "Nasıl" soruları etrafında detaylandırıp anlamlandırarak yapılan bir üst düzey düşünme eylemidir. Başka bir deyişle, muhakeme, düşünme eyleminin çok üzerinde bir uğraş olup, ilgili problem, olay ya da durumun bütün hususlarını etraflıca düşünüp mantıklı bir sonuca varma işidir. Muhakeme sayesinde düşünüp etkili kararlar verildiği için muhakemenin günlük yaşamımızı kolaylaştıran önemli bir yetenektir (Erdem, 2011:15).

Cebirsel muhakeme genellikle matematiksel muhakemenin önemli bir formunu oluşturmaktadır (Nilklad, 2004). Bir başka ifade ile cebirsel muhakeme nicel durumları göstererek değişkenler arasındaki ilişkiyi açık hale getirebilme kapasitesidir (Driscoll, 1999). Vance (1998) cebirsel muhakemeyi; değişkenleri genellemeleri, temsillerin farklı modlarını ve hesaplamalardan yapılan soyutlamaları kapsayan muhakemenin bir yolu olarak karakterize etmektedir. Kaput (1994) göre cebirsel muhakeme; bilerek genellemeler yapma, araştırma ve varsayımda bulunma, modellerin ve düzenlerin temsiline yönelik yapılan süreçlerin inşasıdır. Aynı zamanda cebirsel muhakeme kavramı çeşitli temsillerle modellenen problemlerin ve örüntülerin genellendiğinde matematiksel süreçlerin tanımlanmasında kullanılır (Driscoll, 1999; Herbert ve Brown, 1997; NCTM, 2000). Öğrencilerde muhakeme edebilme becerisi genel beceriler içerisinde yer alır ve muhakeme alanları içerisindeki en geniş tanım kümesinden oluşur. Matematiksel muhakeme ise matematiksel bilgilerin kullanıldığı ve harmanlandığı becerilerden oluşmaktadır. Matematiksel muhakemenin bir alt dalı olarak cebirsel yapı ve ilişkilerin sıkça kullanıldığı becerilerin yer aldığı yapılar topluluğu da cebirsel muhakemedir. Aşağıda yer alan şekilde anlatılanlar kısaca özetlenmeye çalışılmıştır.



**Şekil 1.** Muhakeme Becerileri Arasındaki İlişki

Cebiri anlamada ve kullanma da cebirsel muhakemenin gelişimi çok önemlidir. Cebirsel muhakemenin gelişimi için ise fonksiyonel ilişkilerin matematiksel gösterimlerinde kullanılan çevirme ve uygulama yapma bilişsel becerileri gerekir (Brenner ve diğer.,1997). Bu yüzden matematik öğrenme ve öğretme sürecinde bu temel sorun dikkate alınmalıdır. Çünkü birçok sayısal değerlendirmenin kolay hale getirilmesinde, karşılaştırılmasında ve manipüle edilmesinde ayrıca genel ilişkiler içerisinde yer alan sembolik ifadelerin karakterize edilmesinde cebirsel muhakeme önemli bir rol oynar (Smith ve Thompson, 2007). Son on yıl içerisinde yapılan bilimsel araştırmalar gösteriyor ki okul öncesi dönemden 12 yaş grubuna kadar geçen süreçte erken yaştaki cebirsel muhakeme ve cebir öğrenimi matematik müfredatının içeriği için çok önemlidir (Blanton ve Kaput, 2005).



**Şekil 2.** Genel Muhakeme Zinciri

Cebirsel muhakeme aynı zamanda bir zincirin halkaları gibi sarmal döngüden meydana gelmektedir. Şekil 2'de yer verdiğimiz bu ilişkisel yapı saat yönünde incelendiğinde; öğrenci cebir performansları; öğretmen mesleki gelişim içeriğine, faaliyetlere, kaynaklara ve topluluklara bağlı olarak değişim göstermektedir. Benzer şekilde öğretmen bilgisi ve bu bilgilerin değişiminin sınıf uygulamalarına yansması da öğrenci muhakemesini ve değişimini yakından etkilemektedir. Gerek öğretmen bilgisi gerekse öğretmen uygulamalarında yaşanan aksaklıklar ise kendinden önceki halkayı etkileyebilmektedir. Bu sarmal döngü (muhakeme zinciri) öğrenci cebir performansını istenilen noktaya getirinceye kadar devam edebilir. Sonuç olarak sayısal akıl yürütme (muhakeme etme becerisi) matematik başarısı için esastır ve bir cebirsel alan içerisindeki cebirsel düşünebilme becerisi sayısal akıl yürütmenin gelişimine yardımcı olur. Bu sayede cebirsel düşünme, aritmetiksel bir dille cebirsel işlemlere ve sembollere anlam yükleyerek zihinde var olan cebirsel bilginin sınırları doğrultusunda matematiksel ve cebirsel muhakemenin gelişimini sağlar (Kieran ve Chalouh, 1993).

## TARTIŞMA VE ÖNERİLER

Günümüz eğitim anlayışı öğrencilerin bilgiye birinci elden ulaşabilmesi, muhakeme edebilmesi, yaratıcı ve eleştirel düşünebilmesi ve öğrendiklerini günlük hayata aktarabilmesi temeline dayanmaktadır. Özellikle bireylerin kendi yaşamlarında öğrendiklerine yer vermesi, uyum sağlaması ve yaşadığı çevreyi anlamlandırması eğitimin bir parçası olarak görülmektedir (Gür ve Korkmaz, 2003; Senemoğlu, 2005). Bu söylemler, cebir öğrenme alanı için kaçınılmaz bir sürecin başlangıcı

gibidir. Çünkü bireylerin cebir konuları ile ilgili edindiği kazanımlar günlük yaşamlarında önemli rol oynar. Cebir, cebirsel düşünme ve muhakeme edebilme becerilerinin bir ön koşulu olarak düşünüldüğünde sadece bir ders konusundan ziyade günlük hayatta karşılaştığımız güçlüklerle karşı çözüm yolları bulmamıza yarayan bir araç olarak ele alınması gerekmektedir. Nitekim öğrencilerin cebirde başarılı olabilmeleri için kullanılan temel kavramları, sembolleri, ifadeleri iyi anlaması ve kullanabilmesi gerekmektedir (Kieran,1992).

Cebirin bireyler için önemi ortada iken soyut değerler taşıması öğrencilerin cebiri anlamakta zorlanmalarına neden olmaktadır. Bu durum Kaput (1999)'a göre cebirin sadece cebirsel ifadeleri sadeleştirmek, eşitlikleri çözmek, sembolleri kullanmak için kurallar öğrenmek gibi algılandığını, sonuç olarak da neredeyse herkesin cebirden nefret etmekten hoşlanması noktasına geldiği belirtilmiştir. Bu bağlamda, günümüzde bile çok sayıda öğrenci temel cebir bilgilerini ve becerilerini edinerek gerekli yeterlikleri edinmemektedir. Oysa çağdaş öğretim programları amaç, içerik ve beklentiler yönünden incelendiğinde, cebirle ilgili olarak erişilecek hedefler sayıca giderek artmakta ve düzey yükselmekte, her ülkede daha çok sayıda kişinin daha derinlemesine cebir bilgi ve beceriler edinerek yetkinleşmesi gerekmektedir (Ersoy ve Erbaş, 2005:3). Matematik eğitiminde uluslararası düzeyde kabul gören Ulusal Matematik Öğretmenleri Konseyi (National Council of Teachers of Mathematics [NCTM], 2000) raporunda öğrencilerin matematik konularının diğer disiplinlerle ve günlük hayatla olan ilişkilerinin görmelerini sağlamanın onların matematiğin soyut kurallar şeklindeki düşüncelerinde bir değişime neden olacağını ifade etmektedir.

Cebirsel düşünme ve muhakeme becerisi öğrencilerin yalnızca matematik derslerinde değil kendi günlük yaşamlarında karşı karşıya kaldıkları güçlüklerin üzerinde düşünmeye, yorum yapmaya ve çözüm yolu aramaya yönelik zihinsel aktiviteleri içerir. Oysa öğrencilerin cebir öğrenmeleri ile ilgili yapılan araştırmaların genelinde; öğrencilerin cebirsel düşünme ve muhakeme etme becerisi ile cebirsel işlem yürütme becerilerinin yetersiz olduğu, matematiksel bilgileri ilişkilendirmede zorlandıkları ve günlük yaşam durumları arasında bağlantı kuramadıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebiri anlamaları ve cebirsel düşünme düzeylerini yükseltebilmeleri için öğrendiklerini uygulayabilmeli, kavramlar arasında geçişler yapabilmeli ve çoklu temsil değerleri ile bunu ortaya koyabilmeleri gerekmektedir. Her öğrencinin anaokulu öğrenimden başlamak üzere lise öğreniminin sonuna kadar olan dönem boyunca cebirin gerekli düzeylerini öğrenmesi gerekir (NCTM, 2000).

Öğrencilerdeki temel cebirsel kavramların oluşmasıyla birlikte, cebirsel düşünme ve muhakeme becerilerinin gelişimi ilköğretim çağında başlar ve cebir öğretimi ile devam eder. Öğrencilere cebiri öğretirken öğrenme ortamlarının çeşitlendirilmesi ve anlamlı öğrenmeye destek olacak etkinliklere yer verilmesi bu süreçte kritik bir öneme sahiptir.

## KAYNAKÇA

- Altun, M. (2005). *İlköğretim İkinci Kademedeki Matematik Öğretimi*. Bursa: Alfa Basım Yayım.
- Baki, A. (1998). Matematik Öğretiminde İşlemsel ve Kavramsal Bilginin Dengelenmesi. Atatürk Üniversitesi 40. Kuruluş Yıldönümü Matematik Sempozyumu. (20-22 Mayıs 1998). Erzurum: Atatürk Üniversitesi.
- Beaton, A. E., Mullis, S.V.I., Martin, O.M., Gonzalez, J. E., Kelly, L.D. & Smith, A. T. (1996). *Mathematics Achievement in the Middle School Years: IEA's Third International Mathematics and Science Study*. Chestnut Hill, MA, USA: Center for the Study of Testing, Evaluation, and Educational Policy, Boston College.
- Blanton, L. M. & Kaput, J. J. (2005). Characterizing a Classroom Practice that Promotes Algebraic Reasoning. *Journal for Research in Mathematics Education*, 36(5), 412-446.
- Blume, G. W. & Heckman, D. S. (2000). Algebra and Functions. In E. Silver & P. Kenney (Ed.), *Results from the Seventh Mathematics Assessment* (pp. 269-306). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Booth, L. R. (1986). Difficulties in Algebra. *Australian Mathematics Teacher*, 42(3), 2-4.

- Brenner, M. E., Brar, T., Durán, R., Mayer, R. E., Moseley, B., Smith, B. R., & Webb, D. (1997). Learning by Understanding: The Role of Multiple Representations in Learning Algebra. *American Educational Research Journal*, 34(4), 663-689.
- Cockcroft, W. H. (1982). *Mathematics Counts: Report of the Committee of Enquiry*. London: Her Majesty's Stationery Office.
- Çelik, D. (2007). Öğretmen Adaylarının Cebirsel Düşünme Becerilerinin Analitik İncelenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Karadeniz Teknik Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Çubukçu, Z. (2004). Öğretmen Adaylarının Düşünme Stillerinin Öğrenme Biçimlerini Tercih Etmelerindeki Etkisi. XIII. Ulusal Eğitim Bilimleri Kurultayı. (6-9 Temmuz 2004). Eğitim Fakültesi, Malatya: İnönü Üniversitesi
- Dede, Y., Yalın, H. ve Argün, Z. (2002). İlköğretim 8. Sınıf Öğrencilerinin Değişken Kavramının Öğrenimindeki Hataları ve Kavram Yanılgıları. UFBMEK (16-18 Eylül 2002). Ankara: ODTÜ.
- Dede, Y. ve Argün, Z. (2003). Cebir, Öğrencilere Niçin Zor Gelmektedir?. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 180-185.
- Dindyal, J. (2003). Algebraic Thinking in Geometry at High School Level. Unpublished Doctoral Dissertations, Illinois State University.
- Driscoll, M. (1999). *Fostering Algebraic Thinking: A Guide for Teachers Grades 6-10*. Portsmouth, NH: Heinemann.
- Doerr, H. M. (2004). Teachers' Knowledge and the Teaching of Algebra. In K. Stacey & H. Chick (Ed). *The Future of the Teaching and Learning of Algebra* (pp. 267-290). Dordrecht, The Netherlands: Kluwer.
- Erdem, E. (2011). İlköğretim Yedinci Sınıf Öğrencilerinin Matematiksel ve Olasılıksal Muhakeme Becerilerinin İncelenmesi. Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi, Adıyaman Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü.
- Ersoy, Y. ve Erbaş, K. (1998). İlköğretim Okullarında Cebir Öğretimi: Öğrenmede Güçlükler ve Öğrenci Başarıları. Cumhuriyetin 75. Yılında İlköğretim I. Ulusal Sempozyumu. (27-28 Kasım 1998). Ankara: Başkent Öğretmenevi.
- Ersoy, Y. ve Erbaş, K. (2005). Kassel Projesi Cebir Testinde Bir Grup Türk Öğrencinin Genel Başarısı ve Öğrenme Güçlükleri. *İlköğretim Online*, 4(1), 18-39.
- Gür, H. ve Korkmaz, E. (2003). İlköğretim 7. sınıf öğrencilerinin problem ortaya atma becerilerinin belirlenmesi. Matematikçiler Derneği Bilim Köşesi. <http://www.matder.org.tr/> (15.07.2013).
- Herbert, K. & Brown, R. (1997). Patterns as Tools for Algebraic Reasoning. *Teaching Children Mathematics*, 3(6), 340-344.
- House, P. (1999). Mathematical Reasoning: In the Eye of the Beholder. In L.V. Stiff & F.R. Curcio (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grade K-12: 1999 Yearbook*. National Council of Teachers of Mathematics, Reston, VA.
- Kaput, J. J. (1994). The Representational Roles of Technology in Connecting Mathematics with Authentic Experience. In R. Biehler, R. W. Scholz, R. Strasser, & B. Winkelmann (Ed.), *Didactics in Mathematics as a Scientific Discipline* (pp. 379-397). Netherlands: Kluwer Academic Publishers.
- Kaput, J. J. (1995). Long-Term Algebra Reform: Democratizing Access to Big Ideas. In C.B. Lacampagne, W. Blair, & J. Kaput (Ed.). *The Algebra Initiative Colloquium* (pp. 33-52). Washington, DC: U.S. Department of Education.
- Kaput, J. J. (1999). Teaching and Learning a New Algebra with Understanding. In E. Fennema & T. Romberg (Ed.) *Mathematics Classrooms that Promote Understanding* (pp. 133-155). Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.
- Kieran, C. (1992). The Learning and Teaching of School Algebra. In: Grouws DA (ed.). *Handbook of Research on Mathematics Teaching and Learning*. New York: Macmillan Publishing Company.
- Kieran, C. & Yerushalmy, M. (2004). Research on the Role of Technology Environments in Algebra Learning and Teaching. In K. Stacey, H. Chick, & M. Kendal (Ed.), *The Future of Teaching and Learning of Algebra* (pp. 99-152). Boston: Kluwer. The 12th ICMI Study.



- Kieran, C., & Chalouh, L. (1993). Prealgebra: The Transition from Arithmetic to Algebra. In Douglas T. Owens (Ed.), *Research Ideas for the Classroom: Middle Grades Mathematics* (pp.178-192). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Lawrence, A. & Hennessy, C. (2002). *Lessons for Algebraic Thinking (Grades 6-8)*. Math Solutions Publications: Sausalito, CA.
- Leitze, A. R. & Kitt, N. A. (2000). Using Homemade Algebra Tiles to Develop Algebra and Prealgebra Concepts. <http://mathforum.org/kb/servlet/JiveServ-let/download/157-1629543-6202516-475281/algebra%20tiles.pdf> (9.12.2013).
- Lithner, J. (2008). A Research Framework for Creative and Imitative Reasoning. *Educational Studies in Mathematics*, 67(3), 255-276.
- MacGregor, M. & Stacey, K. (1993). Cognitive Models Underlying Students' Formulation of Simple Linear Equations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 24(3), 217-232.
- Nathan, J. M. & Koellner, K. (2007). A Framework for Understanding and Cultivating the Transition from Arithmetic to Algebraic Reasoning. *Mathematical Thinking and Learning*, 9(3), 179-192.
- National Assessment of Educational Practices (NAEP) (2002). *Mathematics Framework for the 2003 National Assessment of Educational Progress*. Washington, DC: National Assessment Governing Board.
- National Council of Teachers of Mathematics (NCTM) (2000). *Principles and Standards for School Mathematics*. Reston, VA: National Council of Teacher of Mathematics. <http://www.nctm.org/> (06.08.2013).
- Nilklad, L. (2004). College Algebra Students' Understanding and Algebraic Thinking and Reasoning with Functions. Unpublished PhD Dissertation, Oregon State University.
- Peresini, D. & Webb, N. (1999). *Analyzing Mathematical Reasoning in Students' Responses Across Multiple Performance Assessment Tasks*. Developing Mathematical Reasoning in Grades K-12/Lee V. Stiff, 1999 Yearbook Editor, National Council of Teachers of Mathematics, Reston, Virginia.
- Russell, S. J. (1999). Mathematical Reasoning in the Elementary Grades. In L.V. Stiff & F.R. Curcio (Ed.), *Developing Mathematical Reasoning in Grade K-12: 1999 Yearbook*. Reston, VA: NCTM.
- Saracaloğlu, A. S., Serin, O., & Bozkurt, N. (2002). Öğretmen Adaylarının Fen Bilimlerine Yönelik Tutumları İle Başarıları Arasındaki İlişki. *Ege Eğitim Dergisi*, 1(2).
- Senemoğlu, N. (2005). *Gelişim, Öğrenme ve Öğretim: Kuramdan Uygulamaya*. Ankara: Gazi Kitabevi.
- Serin, O. (2001). Lisans ve lisansüstü düzeydeki fen grubu öğrencilerinin problem çözme becerileri, fen ve bilgisayara yönelik tutumları ile başarıları arasındaki ilişki. *KTU, Trabzon*
- Serin, O. (2007). The Examination Of Primary School Teachers' Problem Solving Skills In Terms Of Various Variables. *Eğitim ve Bilim*, 32(142), 80.
- Serin, O. (2011). The effects of the computer-based instruction on the achievement and problem solving skills of the science and technology students. *TOJET: The Turkish Online Journal of Educational Technology*, 10(1).
- Smith, J. & Thompson, P. W. (2007). Quantitative Reasoning and the Development of Algebraic Reasoning. In J. J. Kaput, D. W. Carraher & M. L. Blanton (Ed.), *Algebra in the Early Grades* (pp. 95-132). New York: Erlbaum.
- Stacey, K. & MacGregor, M. (1997). Building Foundations for Algebra. *Mathematics in the Middle School*, 2(4), 253-260.
- Swafford, J. O. & Langrall, C. W. (2000). Grade 6 Students' Pre-Instructional Use of Equations to Describe and Represent Problem Situations. *Journal for Research in Mathematics Education*, 31(1), 89-112.
- Thomas, M. & Tall, D. (2001). The Long-Term Cognitive Development of Symbolic Algebra. In H. Chick, K. Stacey, J. Vincent, & J. Vincent (Ed.), *12th ICMI Study Conference: The Future of the Teaching and Learning of Algebra*. Melbourne: University of Melbourne.
- TIMSS, (2003). IEA's TIMSS 2003 International Report on Achievement in the Mathematics Cognitive Domains: Findings from a Developmental Project International Association for the Evaluation of Educational Achievement. *TIMSS & PIRLS International Study Lynch School of Education*, Boston College.

- Trybulski, D. J. (2007). Algebraic Reasoning in Middle School Classrooms: A Case Study of Standards-Based Reform and Teacher Inquiry in Mathematics. Unpublished PhD Dissertation, University of Pennsylvania.
- Umay, A. (1996). Matematik Eğitimi ve Ölçülmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 12, 145-149.
- Umay, A. (2003). Matematiksel Muhakeme Yeteneği. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 24, 234-243.
- Vance, J. H. (1998). Number Operations from an Algebraic Perspective. *Teaching Children Mathematics*, 4, 282-285.
- Yackel, E. & Hanna, G. (2003). Reasoning and Proof. In J. Kilpatrick, G. Martin and D. Schifter (Ed.), *A Research Companion to Principles and Standards for School Mathematics* (pp. 227-236). Reston, VA: National Council of Teachers of Mathematics.
- Yackel, E. (1997). A Foundation for Algebraic Reasoning in the Early Grades. *Teaching Children Mathematics*, 3(1), 276-280.
- Yenilmez, K. ve Teke, M. (2008). Yenilenen Matematik Programının Öğrencilerin Cebirsel Düşünme Düzeylerine Etkisi. *İnönü Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi*, 9(15), 229-246.

### Extended Abstract

In this study, the importance of algebraic thinking and algebraic reasoning skills for primary school students are discussed and the justification of this situation is tried to be proved. It was seen that students have had difficulties in learning algebra since the beginning of the teaching of the algebra subjects were taught in math class (Ersoy and Erbaş, 2005). Results of many researches show that students have difficulties in understanding algebra concepts (equation, equality, variable, algebraic expressions, the unknown concept etc.) and they have algebra misconceptions (Baki, 1998; Brizuela, Carraher and Schlieman, 2000). The fact that many researches are about the problems related to learning algebra concepts means that there are some problems about students' algebraic thinking and reasoning skills. Besides, the importance of algebraic thinking and reasoning is emphasised and different approaches for its teaching are included in international studies (NAEP, 2002; NCTM, 1989, 2000; TIMSS, 2003).

Algebra is one of the subject fields that have an important place in mathematics and there has been many researches related to teaching/learning/meaning of algebra and the effect of developing technology on teaching of algebra especially in the last 25 years. As a result of these researches, many countries revolutionized and made arrangements about the teaching of algebra on their curriculum. However, in contrast to the alteration and the regulation that they did, it was seen that students have still difficulties in learning of algebra in many countries (Baki, 1998; Dede and Argün, 2003; Kieran, 1992, 2007). Cockcroft (1982:60) has summarized this situation as follows: Algebra is the reason of negative attitudes and an important confusion between students. Although there has been many researches related to learning and teaching of algebra in the literature, there has been a limited number of researches about especially how teachers should teach algebra and which conditions can be that effective algebra learning environment should have. It is thought that this situation cause teaching of algebra in schools is continued by adhering to conventional methods (Doerr, 2004).

However the importance of algebra for individuals is explicit, students have difficulties in algebra learning because of the fact that algebra has abstract concepts. To Kaput (1999), algebra is perceived as only simplifying the algebraic expressions, solving equations, learning rules to use symbols, as a result of this situational most all people get to like to hate algebra. In this regard, many students can not gain basic algebra knowledge and required qualifications. However, when contemporary curriculums are analysed in terms of objectives, content and expectations, targets to be achieved related to algebra are increasing and the level is rising, in each country, a greater number of people should be competent by getting more in depth knowledge and skills (Ersoy and Erbaş, 2005:3). Finally, by being formed of students' basic algebraic concepts, the development of algebraic thinking and reasoning skills starts in elementary school and continues with teaching algebra. Diversifying

learning environments and using activities that will support meaningful learning have a critical role in the process of teaching algebra.

IJTASE